Examen partiel du 6 novembre 2010

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées. On peut obtenir une excellente note sans avoir répondu à toutes les questions. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres (parlantes) et les variables muettes (liées). (Le domaine auquel les variables sont astreintes est indiqué entre crochets dans chaque cas.)

(1) $ax^2 + bx + c = 0$.
[$\mathbb{R}$]

(2) L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 1$ est un cercle.
[L'ensemble des points du plan euclidien usuel]

(3) $\forall x (x > 0 \implies x = y^2)$.
[$\mathbb{R}$]

(4) La suite de terme général 2^{-n} est convergente.
[$\mathbb{N}$]

(5) $e^{\lambda x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
[$\mathbb{R}$]

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathcal{E}$ suivant, dans lequel les variables a , x et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \forall x \forall y (ax = ay)$$

1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{E}$.

1.b. Donner une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathcal{E}$ est vrai, puis une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathcal{E}$ est faux.

1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{E}$ ne comportant aucune variable muette.

2. On considère les énoncés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$\mathcal{F}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$

a au moins une solution.

$\mathcal{G}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$

a au moins une solution quels que soient les seconds membres.

2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de chacun des énoncés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

2.b. Donner des valeurs des variables libres de $\mathcal{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathcal{F}$ est vrai, puis des valeurs des variables libres de $\mathcal{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathcal{F}$ est faux.

2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{G}$ ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé $\mathcal{H}$ suivant, dans lequel la variable f est astreinte à l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$\mathcal{H}$: L'application f est strictement croissante.

3.a. Donner un énoncé synonyme de l'énoncé (non $\mathcal{H}$) écrit en utilisant exclusivement les symboles suivants :

la variable f , des variables astreintes à $\mathbb{R}$, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs et les symboles $\leq$, $<$, $\geq$ et $>$.

3.b. Montrer que, dans la question 3.a, on peut se passer des symboles $\leq$, $<$ et $>$.

Exercice 3

Les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. En utilisant la contraposée, donner un énoncé synonyme de

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \implies (a + b + ab \neq -1)$$

qui n'utilise pas le symbole $\neq$.

2. Démontrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall a \forall b ((a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \implies (a + b + ab \neq -1)).$$

Exercice 4

On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : & ((A \text{ ou } B) \implies C) \implies ((A \implies C) \text{ ou } (B \implies C)) \\ \mathcal{Q} : & ((A \implies C) \text{ ou } (B \implies C)) \implies ((A \text{ ou } B) \implies C) \\ \mathcal{R} : & (A \implies B) \text{ et } (B \implies C) \\ \mathcal{S} : & A \implies C \end{aligned}$$

1. Est-ce que $\mathcal{P}$ est une tautologie ?
2. Est-ce que $\mathcal{Q}$ est une tautologie ?
3. Les propositions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Exercice 5

On considère un ensemble E de nombres entiers naturels (donc un sous-ensemble de $\mathbb{N}$). Dans chacun des quatre cas suivants, indiquer (en justifiant) si on peut ou non répondre avec certitude à la question

« *Est-il vrai que tous les nombres impairs qui appartiennent à l'ensemble E sont des nombres premiers ?* ».

Lorsque c'est possible, donner la réponse à la question, en justifiant.

- (1) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres premiers est : $\{5, 11, 17\}$.
 - (2) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres impairs est : $\{5, 11, 25\}$.
 - (3) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres non premiers est : $\{6, 16, 28\}$.
 - (4) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs est : $\{6, 16, 28\}$.
-