Corrigé du partiel du 6 novembre 2010

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres (parlantes) et les variables muettes (liées). (Le domaine auquel les variables sont astreintes est indiqué entre crochets dans chaque cas.)

(1) $ax^2 + bx + c = 0$.
[$\mathbb{R}$]

Il n'y a aucun mutificateur (ni explicite ni implicite). Les variables a, x, b et c sont libres.

(2) L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 1$ est un cercle.
[L'ensemble des points du plan euclidien usuel]

Les deux occurrences de la variable M sont muettes (« L'ensemble des points… tels que… » est mutificateur). La variable O est libre (aucun mutificateur n'agit sur elle).

(3) $\forall x \left(x > 0 \Longrightarrow x = y^2\right)$.
[$\mathbb{R}$]

Les trois occurrences de la variable x sont muettes (le quantificateur $\forall$ est mutificateur). La variable y est libre (aucun mutificateur n'agit sur elle).

(4) La suite de terme général 2^{-n} est convergente.
[$\mathbb{N}$]

L'unique occurrence de la variable n est muette. Le mutificateur est l'expression « La suite de terme général… ».

(5) $\mathrm{e}^{\lambda x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
[$\mathbb{R}$]

Les deux occurrences de la variable x sont muettes (« tend vers… quand… tend vers… » est mutificateur). La variable λ est libre (aucun mutificateur n'agit sur elle).

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathscr{E}$ suivant, dans lequel les variables a, x et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathscr{E} : \quad \forall x \forall y (ax = ay)$$

1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathscr{E}$.

Les deux occurrences de la variable x et les deux occurrences de la variable y sont muettes (le quantificateur $\forall$ est mutificateur). La variable a est libre (aucun mutificateur n'agit sur elle).

1.b. Donner une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathscr{E}$ est vrai, puis une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathscr{E}$ est faux.

L'énoncé $\mathscr{E}$ est vrai lorsque a prend la valeur 0 (car l'égalité devient $0 = 0$ quelles que soient les valeurs de x et de y) et faux lorsque a prend la valeur 1 (car $\mathscr{E}$ est alors l'énoncé $\forall x \forall y (x = y)$ qui veut dire qu'il y a au plus un nombre réel, ce qui est faux).

1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{E}$ ne comportant aucune variable muette.

Supposons que l'énoncé $\mathscr{E}$ soit vrai, alors l'égalité $ax = ay$ est vraie quels que soient les réels x et y, et en particulier lorsque $x = 1$ et $y = 0$. Cela veut dire que $a \times 1 = a \times 0$, c'est-à-dire que $a = 0$. On en déduit que l'énoncé $\mathscr{E}$ est vrai lorsque a prend la valeur 0 et faux lorsque a prend n'importe quelle autre valeur. Il est donc synonyme de l'énoncé $a = 0$ (qui ne contient pas de variable muette).

2. On considère les énoncés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$\mathscr{F}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant
$$\begin{cases} x + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$
a au moins une solution.

$\mathscr{G}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant
$$\begin{cases} x + y = a \\ x + my = b \end{cases}$$
a au moins une solution quels que soient les seconds membres.

2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de chacun des énoncés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

L'expression « Le système d'équations d'inconnues… » est mutificatrice. Donc toutes les occurrences des variables x et y sont muettes, aussi bien dans $\mathscr{F}$ que dans $\mathscr{G}$. Dans l'énoncé $\mathscr{F}$, il n'y a pas d'autre mutificateur (ni explicite ni implicite), et donc les variables a, b et m y sont libres. Dans l'énoncé $\mathscr{G}$, l'expression « quels que soient les seconds membres » est mutificatrice. Les variables a et b sont donc muettes dans $\mathscr{G}$ tandis que la variable m y est libre. En résumé, dans $\mathscr{F}$, x et y sont muettes et a, b et m sont libres, et dans $\mathscr{G}$, x, y, a et b sont muettes et m est libre.

2.b. Donner des valeurs des variables libres de $\mathscr{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathscr{F}$ est vrai, puis des valeurs des variables libres de $\mathscr{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathscr{F}$ est faux.

L'énoncé $\mathscr{F}$ est vrai par exemple lorsque $a = b = m = 1$ (car il est alors synonyme de « il existe des réels x et y tels que $x + y = 1$ », ce qui est manifestement vrai) et il est faux lorsque $a = 0$ et $m = b = 1$ (car il est alors synonyme de « il existe des réels x et y tels que $x + y = 0$ et $x + y = 1$ », ce qui est manifestement faux).

2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{G}$ ne comportant aucune variable muette.

Supposons que $m = 1$. Alors, comme on vient de le remarquer à la question 2.b, l'énoncé $\mathscr{F}$ est faux si $a = 0$ et $b = 1$. Il n'est donc pas vrai que le système d'équations proposé ait une solution quels que soient les second membres. Il en résulte que, lorsque $m = 1$, l'énoncé $\mathscr{G}$ est faux.

Supposons maintenant que m désigne un réel différent de 1. Alors, quels que soient les réels a et b, le couple $\left(\frac{ma-b}{m-1}, \frac{b-a}{m-1}\right)$ est solution du système d'équations considéré (et c'est d'ailleurs son unique solution). L'énonce $\mathscr{G}$ est donc vrai dans ce cas.

On en déduit que l'énoncé $\mathscr{G}$ est synonyme de l'énoncé $m \neq 1$ (qui ne contient pas de variable muette).

3. On considère l'énoncé $\mathscr{H}$ suivant, dans lequel la variable f est astreinte à l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{H}: \quad \text{L'application } f \text{ est strictement croissante.}$$

3.a. Donner un énoncé synonyme de l'énoncé (non $\mathscr{H}$) écrit en utilisant exclusivement les symboles suivants :
la variable f, des variables astreintes à $\mathbb{R}$, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs et les symboles $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ et $>$.

L'énoncé suivant (dans lequel les varaibles x et y sont astreintes à $\mathbb{R}$) est synonyme de $\mathscr{H}$:

$$\forall x \forall y \left(x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)\right)$$

et donc l'énoncé suivant est synonyme de « non $\mathscr{H}$ » :

$$\exists x \exists y \left(x < y \text{ et non } \left(f(x) < f(y)\right)\right)$$

que l'on peut bien sûr remplacer par l'énoncé synonyme suivant :

$$\exists x \exists y \left(x < y \text{ et } f(x) \geqslant f(y)\right)$$

3.b. Montrer que, dans la question 3.a, on peut se passer des symboles $\leqslant$, $<$ et $>$.

Il suffit de remarquer que l'énoncé $x < y$ est synonyme de « non $(x \geqslant y)$ ». On obtient ainsi un énoncé synonyme de « non $\mathscr{H}$ » qui satisfait les conditions imposées :

$$\exists x \exists y \left(\text{non} \left(x \geqslant y\right) \text{ et } f(x) \geqslant f(y)\right)$$

Exercice 3

Les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. En utilisant la contraposée, donner un énoncé synonyme de

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a + b + ab \neq -1)$$

qui n'utilise pas le symbole $\neq$.

La contraposée de $(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a + b + ab \neq -1)$ est, par définition, l'énoncé

$$\text{non}(a + b + ab \neq -1) \Longrightarrow \text{non}(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1)$$

qui est clairement synonyme de

$$(a + b + ab = -1) \Longrightarrow (a = -1 \text{ ou } b = -1)$$

qui répond à la question.

2. Démontrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall a \forall b ((a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a + b + ab \neq -1)).$$

D'après la question précédente, l'énoncé à démontrer est synonyme de

$$\forall a \forall b((a+b+ab=-1) \Longrightarrow (a=-1 \text{ ou } b=-1)).$$

Considérons deux réels a et b tels que $a+b+ab=-1$. Cette égalité peut s'écrire de façon équivalente $a+b+ab+1=0$, ou encore (en mettant a en facteur) $a(1+b)+b+1=0$, et enfin (en mettant cette fois $b+1$ en facteur)

$$(a+1)(b+1)=0.$$

Un produit de nombres réels est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul. Donc cette dernière égalité est vraie si et seulement si $a=-1$ ou $b=-1$. Nous avons ainsi démontré que, quels que soient les réels a et b, si $a+b+ab=-1$ est vrai, alors $(a=-1$ ou $b=-1)$ est vrai. Cela revient à dire que l'énoncé

$$\forall a \forall b((a+b+ab=-1) \Longrightarrow (a=-1 \text{ ou } b=-1))$$

est vrai, et l'énoncé proposé également.

Exercice 4

On considère les propositions suivantes :

$\mathscr{P}$: $((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow C) \text{ ou } (B \Longrightarrow C))$

$\mathscr{Q}$: $((A \Longrightarrow C) \text{ ou } (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C)$

$\mathscr{R}$: $(A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow C)$

$\mathscr{S}$: $A \Longrightarrow C$

1. Est-ce que $\mathscr{P}$ est une tautologie ?

La réponse est oui : appelons X l'énoncé $((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C)$ et Y l'énoncé $((A \Longrightarrow C) \text{ ou } (B \Longrightarrow C))$ (de sorte que $\mathscr{P}$ est l'énoncé $X \Longrightarrow Y$). On remarque que Y est faux uniquement lorsque l'énoncé $(A \Longrightarrow C)$ et l'énoncé $(B \Longrightarrow C)$ sont tous les deux faux. Mais cela se produit uniquement dans le cas où A est vrai, où B est vrai et où C est faux. Dans ce cas, l'énoncé $(A$ ou $B)$ est vrai et, comme C est faux, X est faux. Il est donc impossible d'avoir simultanément Y faux et X vrai, ce qui revient à dire que l'énoncé $X \Longrightarrow Y$ est une tautologie.

2. Est-ce que $\mathscr{Q}$ est une tautologie ?

La réponse est non : en reprenant les notations de la question 1, $\mathscr{Q}$ est l'énoncé $Y \Longrightarrow X$; si A est vrai et si B et C sont tous les deux faux, alors $(A \Longrightarrow C)$ est faux et $(B \Longrightarrow C)$ est vrai, donc leur disjonction, c'est-à-dire Y, est vraie ; par ailleurs, $(A$ ou $B)$ étant vrai et C étant faux, l'énoncé $((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C)$, c'est-à-dire X, est faux, ce qui fait que l'implication $Y \Longrightarrow X$ est fausse. Ainsi $\mathscr{Q}$ n'est pas une tautologie.

3. Les propositions $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont-elles logiquement équivalentes ?

La réponse est non : si A et C sont faux et si B est vrai, alors $A \Longrightarrow C$ (c'est-à-dire $\mathscr{S}$) est vrai, tandis que $B \Longrightarrow C$ est faux, ce qui rend fausse la conjonction $((A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow C))$, c'est-à-dire que $\mathscr{R}$ est faux. On peut toutefois remarquer que, chaque fois que $\mathscr{R}$ est vrai, $\mathscr{S}$

est vrai aussi (démonstration immédiate), c'est-à-dire que l'implication $\mathscr{R} \Longrightarrow \mathscr{S}$ est une tautologie.

Exercice 5

On considère un ensemble E de nombres entiers naturels (donc un sous-ensemble de $\mathbb{N}$). Dans chacun des quatre cas suivants, indiquer (en justifiant) si on peut ou non répondre avec certitude à la question « *Est-il vrai que tous les nombres impairs qui appartiennent à l'ensemble E sont des nombres premiers ?* ».
Lorsque c'est possible, donner la réponse à la question, en justifiant.

(1) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres premiers est : $\{5,11,17\}$.
(2) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres impairs est : $\{5,11,25\}$.
(3) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres non premiers est : $\{6,16,28\}$.
(4) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs est : $\{6,16,28\}$.

On va envisager plusieurs méthodes pour traiter ce problème.

Méthode 1 : on raisonne cas par cas.

– Dans le premier cas, on n'est pas en mesure de répondre à la question avec certitude, car parmi les éléments de E qui ne sont pas premiers (et qu'on ne connaît pas), il peut y avoir des nombres impairs ou ne pas y en avoir. Par exemple, si $E = \{5,6,11,17\}$, alors tous les nombres impairs appartenant à E sont premiers, tandis que si $E = \{5,11,12,17,21\}$, alors il y a dans E un nombre impair qui n'est pas premier (21). Dans ces deux exemples, l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres premiers est bien $\{5,11,17\}$, mais la réponse à la question posée est OUI dans le premier cas et NON dans le second.
– Dans le deuxième cas, on peut répondre avec certitude à la question posée et la réponse est NON. En effet, on connaît tous les nombres impairs de E et on constate que parmi eux il y en a un qui n'est pas premier (25).
– Dans le troisième cas, on peut répondre avec certitude à la question posée et la réponse est OUI. En effet, on connaît tous les nombres de E qui ne sont pas premiers et on constate que parmi eux il n'y en a aucun qui est impair, ce qui revient à dire que tous les nombres impairs de E sont des nombres premiers.
– Dans le quatrième cas, on n'est pas en mesure de répondre à la question avec certitude, car on connaît les éléments de E qui sont pairs mais on ne connaît pas ceux qui sont impairs, et il est possible que ceux-ci soient tous premiers comme il est possible qu'ils ne soient pas tous premiers. Par exemple, si $E = \{6,13,16,28,33\}$, alors il y a dans E un nombre impair qui n'est pas premier (33), tandis que si $E = \{6,16,17,28,31\}$, alors tous les nombres impairs appartenant à E (c'est-à-dire 17 et 31) sont premiers. Dans ces deux exemples, l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs est bien $\{6,16,28\}$, mais la réponse à la question posée est NON dans le premier cas et OUI dans le second.

Méthode 2 : La question posée équivaut à la suivante :
« Peut-on savoir avec certitude si l'énoncé :

$$(\forall n \in E)\,(n \text{ est impair} \implies n \text{ est premier})$$

est vrai ou non ? ».
En utilisant la contraposée, on voit que la question est encore équivalente à :

« Peut-on savoir avec certitude si l'énoncé :

$$(\forall n \in E)\,(n \text{ est non premier} \implies n \text{ est pair})$$

est vrai ou non ? ».
- Si l'on connaît tous les éléments de E qui sont des nombres impairs (c'est ce qui se passe dans le deuxième cas), alors il suffit pour répondre à la question de vérifier pour chacun d'eux s'il est premier ou non. S'ils sont tous premiers, alors la réponse la réponse à la question est OUI (ce n'est pas le cas ici puisqu'il y a parmi eux le nombre 25), s'il y en a au moins un qui n'est pas premier (c'est le cas ici avec 25), alors la réponse est NON.
- Si l'on connaît tous les éléments de E qui sont des nombres non premiers (c'est ce qui se passe dans le troisième cas), alors il suffit pour répondre à la question de vérifier pour chacun d'eux s'il est pair ou non. S'ils sont tous pairs (c'est le cas ici), alors la réponse à la question est OUI, s'il y en a au moins un qui est impair, alors la réponse est NON.
- Dans les deux autres cas (premier et quatrième cas), on ne connaît ni l'ensemble des nombres impairs de E ni l'ensemble des nombres non premiers de E et on ne peut donc pas savoir si oui ou non tous les nombres impairs de E sont premiers.

Méthode 3 : C'est une variante, plus simple, de la méthode 2, dans laquelle on remplace l'énoncé sur lequel on doit se prononcer par sa négation. Il s'agit donc de savoir si l'énoncé

$$(\exists n \in E)\,(n \text{ est non premier et } n \text{ est impair})$$

est vrai ou non.
Pour répondre à la question, il suffit de connaître l'ensemble des nombres non premiers de E (troisième cas) et de vérifier s'il y a ou non parmi eux des nombres impairs (ici il n'y en a pas, donc tous les nombres impairs de E sont premiers dans le troisième cas) ou de connaître l'ensemble des nombres impairs (deuxième cas), et de vérifier si parmi eux il y a ou non des nombres non premiers (ici il y en a puisque 25 en est un, donc dans le deuxième cas il n'est pas vrai que tous les nombres impairs de E sont premiers). Si on ne connaît ni l'ensemble des nombres non premiers de E, ni l'ensemble des nombres impairs de E (premier et quatrième cas), alors on ne peut pas répondre avec certitude à la question posée, puisqu'il peut exister dans E des nombres impairs non premiers comme il peut ne pas en exister.

Méthode 4 : On appelle A l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres à la fois impairs et premiers, B l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres à la fois impairs et non premiers, C l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres à la fois pairs et premiers et D l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres à la fois pairs et non premiers. Il est clair que la réunion de ces quatre ensembles est l'ensemble E tout entier et que ces quatre ensembles sont deux à deux disjoints. Cela signifie que la connaissance de certains de ces quatre ensembles ne nous donne aucune indication sur les autres. De plus, l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres impairs est $A \cup B$, l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres premiers est $A \cup C$, l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs est $C \cup D$, et l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres non premiers est $B \cup D$.
Que se passe-t-il dans chacun des quatre cas considérés dans cet exercice ? Dans le premier cas on connaît $A \cup C$, dans le deuxième cas on connaît $A \cup B$, dans le troisième cas on connaît $B \cup D$ et dans le quatrième cas on connaît $C \cup D$.

La question qui est posée est de savoir si l'ensemble B est vide ou non (en fait la question est : est-ce que $A \cup B$ est inclus dans $A \cup C$?, c'est-à-dire est-ce que tout élément de $A \cup B$ appartient à $A \cup C$? mais compte-tenu du fait que les ensembles A, B et C sont deux à deux disjoints, l'inclusion $A \cup B \subseteq A \cup C$ équivaut à $B \subseteq C$, et donc à $B = \emptyset$). Or dans le premier et dans le quatrième cas on n'a aucun renseignement sur l'ensemble B (et donc on ne peut pas répondre avec certitude à la question) alors que dans les deux autres cas l'ensemble B est connu : c'est $\{25\}$ dans le deuxième cas et c'est l'ensemble vide dans le troisième cas. On peut donc répondre à la question, par NON dans le deuxième cas et par OUI dans le troisième cas.
