

CONTRÔLE 3

EXERCICE 1.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $2^n \geq n$.

EXERCICE 2. Soient a, b, c des réels strictement positifs vérifiant :

(1) $abc > 1$ et

(2) $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

- (a) Donner 5 triplets de réels strictement positifs vérifiant ces inégalités.
(b) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde démontrer :
(1) qu'aucun des réels a, b, c ne peut être égal à 1.
(2) que l'un au moins des réels a, b, c est strictement supérieur à 1.
(3) que l'un au moins des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.
(c) (BONUS) Le but de cette question est de montrer qu'au plus un des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.

On suppose donc que $a < 1$ et $b > 1$ et on va montrer qu'alors $c > 1$.

- (1) Montrer que dans le cas où $ab < 1$, l'inégalité (1) permet de conclure.
(2) On va montrer que dans le cas où $ab > 1$, il n'existe pas de c tel que a, b, c vérifient les inégalités (1) et (2) : supposons donc qu'il existe un tel c
Montrer que l'hypothèse $ab > 1$ entraîne $a + b > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
Dédurre alors des inégalités (1) et (2) que $\frac{1}{ab} < c < 1$,
En déduire un encadrement de $\frac{1}{c}$.
Montrer en utilisant l'inégalité (2) que l'on a alors $a + b + \frac{1}{ab} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$ et que ceci est en contradiction avec les hypothèses faites sur a et b (on pourra utiliser la factorisation $a^2b + ab^2 + 1 - b - a - a^2b^2 = (1 - a)(b - 1)(ab - 1)$ que vous vérifierez).

EXERCICE 3. Dans cet exercice f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

- (a) Soit $A \subseteq E$, donner une expression en compréhension de $f(A)$.
(b) Soit $B \subseteq F$, donner une expression en compréhension de $f^{-1}(B)$.
(c) Montrer qu'on a $\forall A \subseteq E \quad A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
(d) Montrer que si f est injective on a $\forall A \subseteq E \quad f^{-1}(f(A)) \subseteq A$
(e) Montrer qu'on a $\forall B \subseteq F \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B$
(f) Montrer que si f est surjective on a $\forall B \subseteq F \quad B \subseteq f(f^{-1}(B))$