

Exercice 1.

• On a bien $2^1 = 2 \geq 1$

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m \geq m$

$$\text{Alors } 2^{m+1} = 2 \times 2^m \geq 2 \times m = m + m \geq m + 1$$

On a donc démontré par récurrence que
 $\forall m \geq 1 \quad 2^m \geq m$.

Exercice 2:

a) les triplets suivants vérifient les inéquations (1) et (2):

$$(100; 100; 0,001) \quad (0,2; 2; 3) \quad (0,1; 3; 4)$$

$$(1,1; 1,3; 0,7) \quad (0,05; 2; 12)$$

b) (1) Supposons $a=1$ ou $b=1$ ou $c=1$

• si $a=1$, alors de (1) on déduit $bc > 1$

$$\text{de (2) on déduit } b+c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{Mais } b+c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow b+c < \frac{b+c}{bc}$$

$$\Leftrightarrow bc < 1 \text{ d'où une contradiction.}$$

De la même manière, on montre que l'on a $b \neq 1$ et $c \neq 1$

(2) On veut montrer $a > 1$ ou $b > 1$ ou $c > 1$

Supposons sa négation, c'est-à-dire $a \leq 1$ et $b \leq 1$ et $c \leq 1$.
On aurait alors $abc \leq 1$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité (1)

(3) On veut montrer $a < 1$ ou $b < 1$ ou $c < 1$

Supposons sa négation, c'est-à-dire $a \geq 1$ et $b \geq 1$ et $c \geq 1$
On aurait alors $a \geq \frac{1}{a}$ et $b \geq \frac{1}{b}$ et $c \geq \frac{1}{c}$

D'où $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité (2)

c) (1) Si $ab < 1$, alors de (1) on déduit $c > \frac{1}{ab} > 1$

(2) $ab > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} < a+b$

D'après l'inégalité (1), $c > \frac{1}{ab}$

D'après l'inégalité (2), on a $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Or $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < a + b$ donc c doit vérifier $c < \frac{1}{c}$

c'est-à-dire $c < 1$

On a donc $\frac{1}{ab} < c < 1$

et donc $ab > \frac{1}{c} > 1$

Donc $a+b+c > a+b+\frac{1}{ab}$

et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$

On déduit alors de l'inégalité (2) que l'on a

$$a+b+\frac{1}{ab} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$$

c'est-à-dire $a^2b + ab^2 + 1 - b - a - a^2b^2 < 0$
 $\Leftrightarrow (1-a)(b-1)(ab-1) < 0$

Or $a < 1$ donc $1-a > 0$

$b > 1$ donc $b-1 > 0$

$ab > 1$ donc $ab-1 > 0$

On a donc une contradiction.

Donc quand $ab > 1$, on ne peut pas trouver de membre c tel que a, b, c vérifient les inégalités (1) et (2)

Exercice 3:

a) $f(A) = \{x \in F ; \exists t \in A \ x = f(t)\}$

b) $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$

c) Soit $A \subseteq E$ et $x \in A$

Alors $f(x) \in f(A)$

et $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E ; f(x) \in f(A)\}$

Donc $x \in f^{-1}(f(A))$ d'où $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

d) Supposons f injective, et soit $A \subseteq E$, et $x \in f^{-1}(f(A))$
 Alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$
 Et puisque f est injective, $x = x' \in A$

e) Soit $B \subseteq F$ et soit $y \in f(f^{-1}(B))$
Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$
Et puisque $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) = y \in B$
d'où $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

f) Supposons que f est surjective et soit $y \in B \subseteq F$,
alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$
 $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$ donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$
D'où $B \subseteq f(f^{-1}(B))$