Université Paris Diderot | **Premier semestre 2010-2011**
Licence 1ère année | **LM1 - Langage Mathématique**

Contrôle 2

Exercice 1. Associativité de l'équivalence.

(a) Montrer que la proposition $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ est logiquement équivalente à $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$ mais pas à $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C))$.

(b) La première constatation aurait pu nous conduire à adopter une écriture simplifiée $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$. Expliquer pourquoi la deuxième nous incite à ne pas le faire.

Exercice 2.

Déterminer l'ensemble E des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui satisfont l'énoncé

« n est pair $\Rightarrow n+1$ est premier »

puis l'ensemble F des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui ne satisfont pas l'énoncé précédent.

Exercice 3.

(a) Enoncer un théorème (sous forme d'implication) dont la démonstration peut se faire par contraposée.
Enoncer cette contraposée, et rédiger une démonstration.

(b) Enoncer un théorème dont la démonstration peut se faire par l'absurde, et rédiger une démonstration.

Exercice 4.

On considère une suite de propositions $A_1, A_2, ..., A_n ...$

(a) Montrer que les propositions $[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ et $[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ sont des tautologies.

(b) Montrer que la proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est une tautologie.

(c) Montrer que la proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est une tautologie.

(d) (bonus) Montrer qu'on a :
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \Rightarrow A_i$ est une tautologie.
Pour tout $i, j, k \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ est une tautologie et si $A_j \Rightarrow A_k$ est une tautologie, alors $A_i \Rightarrow A_k$ est une tautologie.
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_i$ sont des tautologies, alors A_i et A_j sont logiquement équivalents.