**Université Paris Diderot** — **Premier semestre 2010-2011**
**Licence 1ère année** — **LM1 - Langage Mathématique**

# Contrôle 2

---

**Exercice 1.** Associativité de l'équivalence.

(a) Montrer que la proposition $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ est logiquement équivalente à $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$ mais pas à $((A \Leftrightarrow B)\ \wedge\ (B \Leftrightarrow C))$.
Pour vérifier cela on peut utiliser une table de vérité :

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Leftrightarrow B$ | $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ | $B \Leftrightarrow C$ | $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$ | $(A \Leftrightarrow B)\ \wedge\ (B \Leftrightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | **V** | V | **V** | V |
| V | V | F | V | **F** | F | **F** | F |
| V | F | V | F | **F** | F | **F** | V |
| V | F | F | F | **V** | V | **V** | F |
| F | V | V | F | **F** | V | **F** | F |
| F | V | F | F | **V** | F | **V** | V |
| F | F | V | V | **V** | F | **V** | F |
| F | F | F | V | **F** | V | **F** | V |

(b) La première constatation aurait pu nous conduire à adopter une écriture simplifiée $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$. Expliquer pourquoi la deuxième nous incite à ne pas le faire.
La première constatation montre que l'équivalence est associative et pourrait nous conduire à écrire $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ sans parenthèse. Mais cette écriture serait plutôt interprétée comme $((A \Leftrightarrow B)\ \wedge\ (B \Leftrightarrow C))$ qui n'est pas équivalente à $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ et $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$, donc il faut éviter cette notation.

**Exercice 2.**
Déterminer l'ensemble $E$ des entiers $n$ compris (au sens large) entre 1 et 20 qui satisfont l'énoncé

« $n$ est pair $\Rightarrow n+1$ est premier »

puis l'ensemble $F$ des entiers $n$ compris (au sens large) entre 1 et 20 qui ne satisfont pas l'énoncé précédent.
Dans $E$ il y a les entiers $n$ compris entre 1 et 20 tels que :
$n$ est pair et $n+1$ est premier
$n$ est impair (antécédent faux donc implication vraie).
Donc $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$.
D'où $F = \{8, 14, 20\}$.

**Exercice 3.**

(a) Enoncer un théorème (sous forme d'implication) dont la démonstration peut se faire par contraposée.
Enoncer cette contraposée, et rédiger une démonstration.
Deux propositions, à vous de les vérifier : les variables $x, y, \varepsilon$ sont astreintes à $\mathbb{R}$.
$\forall x\,(\forall \varepsilon > 0 \quad x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0.$
$\forall x\,\forall y \quad (x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

(b) Enoncer un théorème dont la démonstration peut se faire par l'absurde, et rédiger une démonstration.
Une proposition : Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ dans l'ensemble de ses parties, alors $f$ n'est pas surjective.

**Exercice 4.**

On considère une suite de propositions $A_1, A_2, ..., A_n...$

(a) Montrer que les propositions $[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ et $[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ sont des tautologies.
La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ est fausse si et seulement si $\neg A_1$ est vraie et $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est fausse, ce qui est impossible car alors $A_1$ est fausse, et donc $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie.
$[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ est donc une tautologie.
La proposition $[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ est fausse si et seulement si $A_1$ est vraie et $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est fausse, ce qui est impossible car si $A_1$ est vraie, $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est vraie aussi.
$[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ est donc une tautologie.

(b) Montrer que la proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est une tautologie.
La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est fausse si et seulement si $\neg A_1$ est vraie et $(\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))$ est fausse. Mais alors $A_1$ est fausse, et donc $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est vraie si et seulement si $A_2$ est fausse, donc $(\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))$ est vraie.
La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est donc une tautologie

(c) Montrer que la proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est une tautologie.
La proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est fausse si et seulement si $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie et $((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))$ est fausse, c'est-à-dire si et seulement si $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie et $(A_2 \Rightarrow A_3)$ est vraie et $(A_1 \Rightarrow A_3)$ est fausse. Mais on a alors $A_1$ vraie et $A_3$ fausse donc quelque soit la valeur de vérité de $A_2$, l'une des deux implications $(A_1 \Rightarrow A_2)$ ou $(A_2 \Rightarrow A_3)$ est fausse. La proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est donc une tautologie

(d) (bonus) Montrer qu'on a :
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \Rightarrow A_i$ est une tautologie.
On a $(A_i \Rightarrow A_i) \equiv (\neg A_i \ \vee \ A_i)$ qui est trivialement une tautologie.
Pour tout $i, j, k \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ est une tautologie et si $A_j \Rightarrow A_k$ est une tautologie, alors $A_i \Rightarrow A_k$ est une tautologie.
On a vu dans le TD 2 que $[((A_i \Rightarrow A_j) \ \wedge \ (A_j \Rightarrow A_k)) \Rightarrow (A_i \Rightarrow A_k)]$ est une tautologie, donc si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_k$ sont des tautologies, c'est-à-dire toujours vraies, $A_i \Rightarrow A_k$ l'est aussi d'après la tautologie ci-dessus.
Attention, il y avait une erreur dans l'énoncé, voici la rectification :
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_i$ sont des tautologies, alors $A_i$ et $A_j$ sont logiquement équivalents.
On a vu que $(A_i \Leftrightarrow A_j) \equiv [(A_i \Rightarrow A_j) \ \wedge \ (A_j \Rightarrow A_i)]$, donc si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_i$ sont des tautologies, $A_i \Leftrightarrow A_j$ est aussi une tautologie, donc $A_i$ et $A_j$ sont logiquement équivalents.