Examen partiel du 21 novembre 2009

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes Les réponses doivent être justifiées. On peut obtenir une excellente note sans avoir répondu à toutes les questions. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres et les variables muettes.

- (1) $x^3 + 4x + c = 0$.
- (2) L'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ et $MC \geq MO$.
- (3) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) [x < y \implies f(x) \leq f(y)]$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$.
- (5) L'ensemble des entiers n tels que que $n^2 + 3$ est un multiple de p .

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathcal{E}$ suivant, dans lequel les variables a , b et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \quad \forall x(ax + b \neq 0)$$

- 1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{E}$.
- 1.b. Donner une valeur de a et une valeur de b pour lesquelles l'énoncé $\mathcal{E}$ est faux.
- 1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{E}$ ne comportant aucune variable muette.

2. On considère l'énoncé $\mathcal{F}$ suivant, dans lequel les variables p , q et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs :

$$\mathcal{F} : \quad \forall x(x \geq p \text{ ou } x \leq q)$$

- 2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{F}$.
- 2.b. Écrire un énoncé équivalent à la négation de $\mathcal{F}$, sans utiliser le mot « non » ni le symbole $\neg$.
- 2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{F}$ ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé $\mathcal{G}$ suivant, dans lequel $\mathcal{R}$ désigne un repère orthonormé fixé du plan euclidien, et où les variables a , b , c , d , x et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels :

$\mathcal{G}$: « Les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires. »

3.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{G}$.

3.b. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{G}$ ne comportant aucune variable muette.

4. En utilisant des variables astreintes à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, des connecteurs et des quantificateurs, les parenthèses, l'addition, la multiplication, et des exposants entiers, écrire un énoncé synonyme de

« Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. »

Exercice 3

Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on désigne par $\mathcal{Q}(A)$ l'énoncé suivant :

$$(\forall x \in A) (\exists y \in A) (y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$ et $<$ désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{Q}(A)$ est vrai ou non :

1. $A = \mathbb{N}$.
2. $A = \mathbb{Q}$.
3. $A = [0, 1]$.
4. $A =]0, 1[$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$.

Exercice 4

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (VRAI ou FAUX) aux propositions A , B et C de telle sorte que l'énoncé suivant soit faux ?

$$(A \implies B) \implies ((C \implies A) \implies (C \implies B))$$

Exercice 5

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Démontrer, par récurrence, que,

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n.$$

La clarté et la précision de la rédaction de cette démonstration seront un élément d'appréciation essentiel pour le correcteur.