Corrigé de l'examen partiel du 21 novembre 2009

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres et les variables muettes.

(1) $x^3 + 4x + c = 0$.

Il n'y a aucun mutificateur dans cette expression : les variables x et c sont libres.

(2) L'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ et $MC \geq MO$.

La variable M est muette. Le mutificateur est l'expression « L'ensemble des ... tels que ». Les autres variables (A, B, C et O) sont libres.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \implies f(x) \leq f(y)]$.

Les variables x et y sont muettes : elles sont mutifiées par les quantificateurs universels. La variable f est libre.

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$.

La variable x est muette : elle est mutifiée par le signe $\lim$. Les variables a, b, c et d sont libres.

(5) L'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 3$ est un multiple de p .

La variable n est muette : le mutificateur est l'expression « L'ensemble des ... tels que ». La variable p est libre.

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathcal{E}$ suivant, dans lequel les variables a, b et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \forall x(ax + b \neq 0)$$

1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{E}$.

La variable x est muette : elle est mutifiée par le quantificateur $\forall$. Les variables a et b sont libres.

1.b. Donner une valeur de a et une valeur de b pour lesquelles l'énoncé $\mathcal{E}$ est faux.

Dans le cas où a vaut 1 et b vaut 0, l'énoncé $\mathcal{E}$ (qui est alors $\forall x(x \neq 0)$) est faux (il n'est pas vrai que tout réel est différent de zéro).

1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{E}$ ne comportant aucune variable muette.

L'énoncé $\mathcal{E}$ est synonyme de

$$a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

Pour le prouver, distinguons trois cas :

1er cas : $a = 0$ et $b \neq 0$ est vrai ; alors l'énoncé $\mathcal{E}$ devient $\forall x(b \neq 0)$ qui est vrai dans ce cas ;

2e cas : $a = 0$ et $b = 0$ est faux parce que $a = b = 0$; alors l'énoncé $\mathcal{E}$ devient $\forall x(0 \neq 0)$ qui est évidemment faux ;

3e cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$ est faux parce que $a \neq 0$; alors l'énoncé $\mathcal{E}$ est également faux, car sa négation, qui équivaut à $\exists x(ax + b = 0)$ est vraie ; il est bien connu en effet que l'équation

en x $ax + b = 0$ admet une solution (d'ailleurs unique) lorsque a est différent de 0, et ce quelle que soit la valeur de b .

On voit ainsi que, dans tous les cas, l'énoncé $\mathcal{E}$ et l'énoncé $a = 0$ et $b \neq 0$ sont soit tous les deux vrais, soit tous les deux faux.

2. On considère l'énoncé $\mathcal{F}$ suivant, dans lequel les variables p , q et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs :

$$\mathcal{F} : \forall x(x \geq p \text{ ou } x \leq q)$$

2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{F}$.

2.b. Écrire un énoncé équivalent à la négation de $\mathcal{F}$, sans utiliser le mot « non » ni le symbole $\neg$.

2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{F}$ ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé $\mathcal{G}$ suivant, dans lequel $\mathcal{R}$ désigne un repère orthonormé fixé du plan euclidien, et où les variables a , b , c , d , x et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels :

$$\mathcal{G} : \text{« Les droites d'équations respectives } y = ax + b \text{ et } y = cx + d \text{ dans le repère } \mathcal{R} \text{ sont perpendiculaires. »}$$

3.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathcal{G}$.

3.b. Donner un énoncé synonyme de $\mathcal{G}$ ne comportant aucune variable muette.

4. En utilisant des variables astreintes à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, des connecteurs et des quantificateurs, les parenthèses, l'addition, la multiplication, et des exposants entiers, écrire un énoncé synonyme de

« Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. »

Exercice 3

Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on désigne par $\mathcal{Q}(A)$ l'énoncé suivant :

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$ et $<$ désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{Q}(A)$ est vrai ou non :

1. $A = \mathbb{N}$.

2. $A = \mathbb{Q}$.

3. $A = [0, 1]$.

4. $A =]0, 1[$.

5. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$.

Exercice 4

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (VRAI ou FAUX) aux propositions A , B et C de telle sorte que l'énoncé suivant soit faux ?

$$(A \implies B) \implies ((C \implies A) \implies (C \implies B))$$

Exercice 5

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Démontrer, par récurrence, que,

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n.$$

La clarté et la précision de la rédaction de cette démonstration seront un élément d'appréciation essentiel pour le correcteur.