Corrigé de l'examen du 12 janvier 2010

Exercice 1

Démontrer que les propositions

$$(p \text{ ou } q) \implies r$$

et

$$(p \implies r) \text{ et } (q \implies r)$$

sont logiquement équivalentes.

La proposition $(p \text{ ou } q) \implies r$ est fausse si et seulement si r est fausse et $(p \text{ ou } q)$ est vraie. Autrement dit, elle est fausse si et seulement si r est fausse et l'une au moins des propositions p, q est vraie.

La proposition $(p \implies r) \text{ et } (q \implies r)$ est fausse si et seulement si l'une au moins des propositions $(p \implies r), (q \implies r)$ est fausse. Or $(p \implies r)$ est fausse si et seulement si r est fausse et p est vraie ; et $(q \implies r)$ est fausse si et seulement si r est fausse et q est vraie. On voit donc que, pour que $(p \implies r) \text{ et } (q \implies r)$ soit fausse, il faut et il suffit que r soit fausse et que l'une au moins des propositions p, q soit vraie.

Les conditions dans lesquelles $(p \text{ ou } q) \implies r$ est fausse et celles dans lesquelles $(p \implies r) \text{ et } (q \implies r)$ est fausse sont donc identiques : ces deux propositions sont logiquement équivalentes.

Exercice 2

Soit A un ensemble non vide. On suppose que la proposition suivante est vraie :

$$\forall X (X \subset A \implies (X = A \text{ ou } X = \emptyset))$$

Démontrer que A est un ensemble à un élément.

Par hypothèse, l'ensemble A contient au moins un élément. Soit donc a un élément de A . Posons $X = \{a\}$ et appliquons à X la proposition de l'énoncé. L'hypothèse $X \subset A$ étant vérifiée, on a $X = A$ ou $X = \emptyset$. Mais X n'est pas vide, donc $X = A$. On a ainsi montré que $A = \{a\}$.

Exercice 3

Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E , on note X^c le complémentaire de X dans E , c'est-à-dire l'ensemble $\{t \in E \mid t \notin X\}$.

1. Soit X et Y des parties de E telles que $X \cup Y = X \cap Y$. Démontrer que $X = Y$.

Quelles que soient les parties X et Y de E , on a $X \cap Y \subset X \subset X \cup Y$ et $X \cap Y \subset Y \subset X \cup Y$. Par conséquent, si on suppose que $X \cup Y = X \cap Y$, on en déduit les égalités $X \cap Y = X = X \cup Y$ et $X \cap Y = Y = X \cup Y$, ce qui exige évidemment $X = Y$.

2. Démontrer que, quelles que soient les parties A et B de E , on a

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

On a les égalités successives : $(A \cap B)^c = \{t \in E \mid t \notin A \cap B\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A \cap B)\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A \text{ et } t \in B)\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A) \text{ ou } \text{non}(t \in B)\} = \{t \in E \mid (t \in A^c) \text{ ou } (t \in B^c)\} = A^c \cup B^c$.

3. Est-il possible que des parties A et B de E soient telles que $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$?

Oui, c'est possible : il suffit de choisir $A = B$. En effet on a alors $A \cap B = A$, donc $(A \cap B)^c = A^c$, $A^c = B^c$, donc $A^c \cap B^c = A^c$, et on en déduit bien $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$.

4. On suppose dans cette question que l'ensemble E est tel que, quelles que soient les parties A et B de E ,

$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$

Démontrer que E est alors l'ensemble vide.

Appliquons l'hypothèse en choisissant $A = E$ et $B = \emptyset$. On obtient ainsi

$$(*) \quad (E \cap \emptyset)^c = E^c \cap \emptyset^c.$$

Or on a $E^c = \emptyset$, $\emptyset^c = E$ et $E \cap \emptyset = \emptyset \cap E = \emptyset$. On en déduit que $(E \cap \emptyset)^c = \emptyset^c = E$ et que $E^c \cap \emptyset^c = \emptyset \cap E = \emptyset$. La relation (*) montre donc que $E = \emptyset$.

On peut donner une autre démonstration du même résultat en utilisant les questions 1 et 2. D'après la question 2, l'hypothèse faite ici équivaut à : quelles que soient les parties A et B de E ,

$$A^c \cup B^c = A^c \cap B^c.$$

Mais d'après la question 1, cette dernière égalité n'est possible que si $A^c = B^c$, c'est-à-dire $A = B$ (deux sous-ensembles qui ont des complémentaires égaux sont égaux !). Ainsi E vérifie la propriété suivante : quelles que soient les parties A et B de E , $A = B$. Autrement dit, E a au plus un sous-ensemble, ce qui signifie exactement que E est vide : l'ensemble vide a un seul sous ensemble (lui-même !), et un ensemble E qui n'est pas vide a au moins deux sous-ensembles distincts, $\emptyset$ et E .

Exercice 4

On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on note $E(A)$ son image directe par E et $E^{-1}(A)$ son image réciproque par E . Autrement dit, on a

$$E(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in A) (y = E(x))\}$$

$$E^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) \in A\}$$

1. L'application E est-elle surjective ?

NON : il n'existe aucun réel x tel que $E(x) = \frac{1}{2}$ (seuls les entiers sont dans l'image de l'application E).

2. L'application E est-elle injective ?

NON : il n'est pas difficile de trouver deux réels distincts ayant même partie entière (par exemple $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$).

3. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

(a) $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$

(b) $E(\{\sqrt{2}\}) = \{1\}$

(c) $E([0, 1[) = \{0\}$

(d) $E\left(\left]0, \frac{1}{\pi}\right[\right) = \{0\}$

(e) $E\left(\left] \frac{1}{2}, 2\right] \right) = \{0, 1, 2\}$

(f) $E(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ [L'inclusion de gauche à droite résulte de (a). L'inclusion inverse est due au fait que, pour tout entier relatif n , on a $n = E\left(n + \frac{1}{2}\right)$.]

(g) $E^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ [Cela est vrai pour n'importe quelle application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.]

(h) $E^{-1}(\{\sqrt{2}\}) = \emptyset$ [Aucun réel n'a pour partie entière $\sqrt{2}$.]

(i) $E^{-1}([0, 1[) = [0, 1[$ [Soit x un réel tel que $E(x) \in [0, 1[$. Alors $E(x) = 0$, car 0 est l'unique entier dans l'ensemble $[0, 1[$. Or les réels qui ont pour partie entière 0 sont ceux de l'ensemble $[0, 1[$.]

(j) $E^{-1}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ [Tout réel a sa partie entière dans $\mathbb{Z}$, donc dans $\mathbb{Q}$.]

4. Est-il vrai que, quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$E(A \cap B) = E(A) \cap E(B) ?$$

Si oui, donner une démonstration. Si non, donner un contre-exemple.

La réponse est NON : le contre-exemple est fourni par les questions 3 (d) et 3 (e). Posons en effet $A =]0, \frac{1}{\pi}[$ et $B =]\frac{1}{2}, 2]$. On a $A \cap B = \emptyset$ (car $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$), donc $E(A \cap B) = \emptyset$, tandis que $E(A) \cap E(B) = \{0\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0\} \neq \emptyset$.

Exercice 5

On rappelle que, pour tout réel $x > 0$, il existe un entier n tel que $\frac{1}{n} < x$.

Dans ce qui suit, la variable a est astreinte à l'ensemble des nombres réels et la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels.

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) dans l'expression

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right].$$

Les deux occurrences de n sont muettes (le mutificateur est le symbole de réunion indexée). Les deux occurrences de a sont parlantes (libres).

2. Pour chacune des quatre expressions suivantes, donner une expression synonyme ne comportant aucune variable muette :

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] & ; \quad \text{B. } \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] \\ \text{C. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] & ; \quad \text{D. } \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] \end{array}$$

$$\text{A. } \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] = [a, a + 1].$$

En effet, pour tout entier $n \geq 1$, on a $a + \frac{1}{n} \leq a + 1$, donc $[a, a + \frac{1}{n}] \subset [a, a + 1]$, d'où l'on déduit l'inclusion $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [a, a + \frac{1}{n}] \subset [a, a + 1]$.

L'inclusion inverse $[a, a + 1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a, a + \frac{1}{n}]$ résulte du fait que $[a, a + 1]$ est l'un des intervalles qui figurent dans la réunion, plus précisément le premier, celui qui correspond à l'indice $n = 1$.

$$\text{B. } \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] = [a, a + 1]$$

L'inégalité $a + \frac{1}{n} \leq a + 1$ montre que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$, $\left] a, a + \frac{1}{n} \right[\subset \left] a, a + 1 \right[$, d'où l'inclusion $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[\subset \left] a, a + 1 \right[$.

Exactement comme en A, l'inclusion inverse, $\left] a, a + 1 \right[\subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[$, résulte du fait que l'intervalle correspondant, dans le second membre, à l'indice $n = 1$, est précisément $\left] a, a + 1 \right[$.

$$C. \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[= \{a\}.$$

D'une part, on a, pour tout entier $n \geq 1$, $a \in \left] a, a + \frac{1}{n} \right[$, et donc $\{a\} \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[$.

D'autre part, soit x un élément de l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[$. Alors on a, pour tout entier $n \geq 1$, $a \leq x \leq a + \frac{1}{n}$. Cela montre en particulier que x est supérieur ou égal à a . Raisonnant par l'absurde, supposons que l'inégalité soit stricte ($x > a$). Alors on aurait $x - a > 0$ et, d'après la propriété rappelée au début de l'exercice, il existe un entier n (évidemment supérieur ou égal à 1) tel que $\frac{1}{n} < x - a$, c'est-à-dire $a + \frac{1}{n} < x$. Cela contredit l'inégalité $x \leq a + \frac{1}{n}$ qui était valable pour tout entier $n \geq 1$. L'inégalité $x \geq a$ ne peut donc pas être stricte. On en déduit que $x = a$. On a ainsi prouvé l'inclusion $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[\subset \{a\}$.

Finalement on a bien établi l'égalité annoncée.

$$D. \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[= \emptyset.$$

On remarque que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intervalle ouvert $\left] a, a + \frac{1}{n} \right[$ est inclus dans l'intervalle fermé correspondant $\left[a, a + \frac{1}{n} \right]$. On en déduit l'inclusion

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[\subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right],$$

c'est-à-dire, vu ce qui a été démontré en C,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] a, a + \frac{1}{n} \right[\subset \{a\}.$$

Or a n'appartient à aucun des intervalles ouverts $]a, a + \frac{1}{n}[$, donc n'appartient pas à leur intersection. Il en résulte que $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]a, a + \frac{1}{n}[$ est un sous-ensemble de $\{a\}$ qui ne contient pas l'élément a : ce ne peut donc être que l'ensemble vide.

Exercice 6

La variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, les variables x et y sont astreintes à $\mathbb{R}$. On considère les deux énoncés $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{G}(A)$ suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A) & \quad (\forall x \in A)(\forall y)(y < x \Rightarrow y \in A). \\ \mathcal{G}(A) & \quad (\forall x \in A)(\exists y \in A)(y < x).\end{aligned}$$

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) de $\mathcal{F}(A)$.

La variable A est parlante. Les variables x et y sont muettes (les mutificateurs étant les quantificateurs) .

2. Dans chacun des exemples suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{F}(A)$ est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux (et seulement dans ce cas), donner une brève justification.

(a) $A = \mathbb{Z}$.

$\mathcal{F}(A)$ est FAUX : on a par exemple $2 \in A$, $\sqrt{2} < 2$ et pourtant $\sqrt{2} \notin A$.

(b) $A = \mathbb{R}$.

$\mathcal{F}(A)$ est VRAI : la partie droite de l'implication ($y \in A$) est vraie quel que soit le réel y .

(c) $A = \mathbb{Q}$.

$\mathcal{F}(A)$ est FAUX : le même exemple qu'en 1 le prouve.

(d) $A =]-\infty, 0]$.

$\mathcal{F}(A)$ est VRAI : pour tout réel x négatif ou nul, et pour tout réel y , si y est inférieur à x , alors y est négatif ou nul.

(e) $A = [0, +\infty[$.

$\mathcal{F}(A)$ est FAUX : on a par exemple $0 \in A$, $-1 < 0$ et pourtant $-1 \notin A$.

3. Démontrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall A(\mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A)).$$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que l'énoncé $\mathcal{G}(A)$ soit faux. Alors la négation de $\mathcal{G}(A)$, c'est-à-dire l'énoncé

$$(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x \leq y),$$

est vraie, ce qui signifie que A a un plus petit élément. Appelons-le a . On a alors $a - 1 < a$ et $a - 1 \notin A$ (puisque a est le plus petit élément de A). Cela prouve que l'énoncé $\mathcal{F}(A)$ est également faux. On a ainsi montré que chaque fois que $\mathcal{G}(A)$ est faux, $\mathcal{F}(A)$ est également faux, ce qui revient à dire que la proposition $\forall A(\mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A))$ est vraie.

4. Démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition réciproque de celle de la question 3, c'est-à-dire la proposition $\forall A(\mathcal{G}(A) \Rightarrow \mathcal{F}(A))$, est fautive.

En choisissant $A = \mathbb{Z}$, on voit que $\mathcal{G}(A)$ est vrai ($\mathbb{Z}$ n'a pas de plus petit élément), alors que $\mathcal{F}(A)$ est faux (voir 2 (a)). Donc la proposition $\forall A(\mathcal{G}(A) \Rightarrow \mathcal{F}(A))$ est fautive.

5. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer, sans justification, s'il est synonyme de $\mathcal{F}(A)$, s'il est synonyme de $\mathcal{G}(A)$ ou s'il n'est synonyme d'aucun de ces deux énoncés :

- (a) A n'a pas de plus petit élément.

Cet énoncé est synonyme de $\mathcal{G}(A)$ (voir 3).

- (b) A est infini.

Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathcal{F}(A)$ ni de $\mathcal{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = [0, +\infty[$ est infini, ne satisfait pas l'énoncé $\mathcal{F}(A)$ (voir 2 (e)) et ne satisfait pas non plus l'énoncé $\mathcal{G}(A)$, puisqu'il a un plus petit élément (0).

- (c) A n'est pas minoré.

Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathcal{F}(A)$ ni de $\mathcal{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = \mathbb{Z}$ n'est pas minoré mais ne satisfait pas l'énoncé $\mathcal{F}(A)$ (voir 2 (e)), et l'ensemble $]0, 1[$ est minoré (par exemple par 0) mais il satisfait l'énoncé $\mathcal{G}(A)$, puisqu'il n'a pas de plus petit élément.

- (d) A n'a pas de borne inférieure.

Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathcal{F}(A)$ ni de $\mathcal{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = \mathbb{Z}$ n'a pas de borne inférieure mais ne satisfait pas l'énoncé $\mathcal{F}(A)$ (voir 2 (e)), et l'ensemble $]0, 1[$ a une borne inférieure (c'est 0) mais il satisfait l'énoncé $\mathcal{G}(A)$, puisqu'il n'a pas de plus petit élément.

- (e) A est soit vide soit un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

Cet énoncé est synonyme de $\mathcal{F}(A)$.

Rappelons d'abord qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, quels que soient les éléments x et y de X tels que $x < y$, tout réel z tel que $x < z < y$ est aussi un élément de X .

Soit A un ensemble tel que $\mathcal{F}(A)$ soit vrai, soit x et y des éléments de A tels que $x < y$, et soit z un réel tel que $x < z < y$. Puisque $\mathcal{F}(A)$ est vrai et que $y \in A$, tout réel strictement inférieur à y est dans A , donc $z \in A$. Ainsi A est un intervalle. Si cet intervalle n'était pas vide et si son extrémité gauche n'était pas $-\infty$, cette extrémité serait par exemple un réel a . Mais on aurait alors $a - 1 < a$ et $a - 1 \notin A$, ce qui contredirait l'énoncé $\mathcal{F}(A)$. Donc A ne peut être que l'ensemble vide ou un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

Maintenant, soit A un ensemble tel que $\mathcal{F}(A)$ soit faux. Dans ce cas c'est sa négation, c'est-à-dire l'énoncé $(\exists x \in A)(\exists y)(y < x \text{ et } y \notin A)$, qui est vraie. Il y a donc un réel x_0 appartenant à A et un réel y_0 n'appartenant pas à A qui vérifient l'inégalité $y_0 < x_0$. Cela montre d'abord que A n'est pas vide (il contient l'élément x_0). Par ailleurs A ne peut pas être un intervalle dont l'extrémité gauche serait $-\infty$, car celui-ci devrait alors contenir l'intervalle $]-\infty, x_0]$, mais c'est impossible puisque $y_0 < x_0$ et $y_0 \notin A$.

Exercice 7

On considère les deux énoncés suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble des entiers naturels :

$$P[n] : 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3$$

$$Q[n] : 4^n + 1 \text{ est divisible par } 3$$

1. Démontrer que les deux énoncés suivants sont vrais :

$$\forall k (P[k] \Rightarrow P[k+1]).$$

$$\forall k (Q[k] \Rightarrow Q[k+1]).$$

Soit k un entier naturel tel que $P[k]$ soit vrai, c'est-à-dire tel que $4^k - 1$ soit divisible par 3. On a l'égalité $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$. L'entier $4^{k+1} - 1$ est donc la somme de deux multiples de 3. Il est donc lui-même divisible par 3. L'énoncé $P[k+1]$ est donc vrai. Nous avons prouvé que l'énoncé $\forall k (P[k] \Rightarrow P[k+1])$ est vrai.

De manière analogue, considérons un entier k tel que $Q[k]$ soit vrai, c'est-à-dire tel que $4^k + 1$ soit divisible par 3. On a l'égalité $4^{k+1} + 1 = 4(4^k + 1) - 3$. L'entier $4^{k+1} + 1$ est donc la différence de deux multiples de 3. Il est donc lui-même divisible par 3. L'énoncé $Q[k+1]$ est donc vrai. Nous avons prouvé que l'énoncé $\forall k (Q[k] \Rightarrow Q[k+1])$ est vrai.

2. L'énoncé $\forall n P[n]$ est-il vrai ?

OUI : en effet, l'énoncé $P[0]$ est vrai ($4^0 - 1 = 0$, donc est divisible par 3). On a prouvé d'une part que $P[0]$ est vrai et d'autre part que $\forall k (P[k] \Rightarrow P[k+1])$ est vrai. Le principe de récurrence nous permet d'en conclure que l'énoncé $P[n]$ est vrai pour tout entier naturel n .

3. L'énoncé $\forall n Q[n]$ est-il vrai ?

NON : par exemple $Q[0]$ est faux puisque $4^0 + 1 = 2$, qui n'est pas divisible par 3.

En fait l'énoncé $Q[n]$ n'est vrai pour AUCUN entier naturel n . Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(4^n + 1) - (4^n - 1) = 2$. Comme $4^n - 1$ est toujours divisible par 3 (question 2), s'il y avait une valeur de n pour laquelle $4^n + 1$ était divisible par 3, la différence $(4^n + 1) - (4^n - 1)$ serait aussi divisible par 3, ce qui est faux puisqu'elle est égale à 2.

Évidemment, le raisonnement par récurrence n'est pas applicable pour cette question 3, bien que l'énoncé $\forall k (Q[k] \Rightarrow Q[k+1])$ soit vrai. C'est l'étape initiale d'un tel raisonnement qui est en défaut.